

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

Il concetto delle equazioni reciproche risale ad A. De Moivre (1667-1754) ed il nome è dovuto a L. Euler (1707-1783).

Girard nel 1629 enunciò, e Gauss poi dimostrò rigorosamente nel 1799, che un'equazione di grado n ha n radici (nell'insieme dei numeri complessi).

Poiché la conoscenza del metodo di risoluzione di nuovi tipi di equazioni, consente la risoluzione delle equazioni determina il contemporaneo progredire degli studi sulla risoluzione dei sistemi.

Un'equazione razionale intera, ridotta a forma normale, si dice *reciproca* se i suoi coefficienti equidistanti dagli estremi sono uguali od opposti; se sono uguali l'equazione si dice *reciproca di prima specie*, se sono opposti si dice *reciproca di seconda specie*.

Ad esempio l'equazione

$$3x^3+13x^2+13x+3=0$$

è reciproca di prima specie.

L'equazione:

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

$$2x^3-6x^2+6x-2=0$$

è reciproca di seconda specie.

Alcune delle classi di equivalenza di cui ci occuperemo sono del tipo:

$$ax^3+bx^2+bx+a=0$$

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$$

Queste sono le equazioni reciproche di prima specie, rispettivamente di terzo, quarto e quinto grado, a coefficienti reali, mentre le analoghe di seconda specie sono

$$ax^3+bx^2-bx+a=0$$

$$ax^4+bx^3-bx-a=0$$

$$ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0$$

Il nome di reciproche a queste equazioni deriva dal fatto che se una di esse ha come radice un numero a , anche il reciproco di quel numero, cioè $1/a$, è radice dell'equazione. Ciò si potrebbe facilmente dimostrare, ma sarà sufficiente il constatarlo nella risoluzione di queste equazioni.

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

Osserviamo che:

“Ogni equazione reciproca di grado dispari ha come radice -1 se è di prima specie e $+1$ se è di seconda specie”.

“Ogni equazione reciproca di grado pari e di seconda specie ha come radici -1 e $+1$ ”.

Esaminiamo separatamente i vari casi di risoluzione delle equazioni reciproche.

Risoluzione delle equazioni reciproche di prima specie e di terzo grado

Una equazione reciproca di terzo grado e quindi di grado dispari, ha sempre come radice:

-1 se è di prima specie

$+1$ se è di seconda specie

Ed allora, essendo in ogni caso nota una radice, l'equazione si può sempre scindere in due: una di primo grado, avente come radice la radice nota, e l'altra di secondo grado avente come radici le due rimanenti radici dell'equazione data.

Consideriamo l'equazione:

$$ax^3+bx^2+bx+a=0$$

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

Avvalendoci della regola di Ruffini scomponiamo nel seguente modo:

$$\begin{array}{r|rrrr} x+1 & a & b & b & a \\ & a & -a+b & a & 0 \end{array}$$

Quindi:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = (x + 1) [ax^2 - (a - b)x + a] = 0$$

e otteniamo:

$$x_1 = -1$$

████████

████████

Basandoci su queste formule risolutive possiamo avendo in input i valori di a, b e c generare un elaborato in linguaggio Visual Basic che ci consente di giungere al calcolo dell'equazione reciproca proposta.

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

Se il discriminante Δ
 $\Delta = (a-b)^2 - 4a^2$ si annulla allora:

$$\Delta = 0$$

e ciò accade se:

$$a-b = \pm 2a$$

da cui:

$$b = 3a$$

quindi:

$$x_2 = x_3 = -b$$

Possiamo determinare le condizioni affinché le radici x_2, x_3 abbiano per valore proprio il
coefficiente a o il suo reciproco
imponendo che:

$$x_2 = a \text{ o } x_2 = \frac{1}{a}$$

Con semplici passaggi algebrici perveniamo ad un'equazione irrazionale:

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

che è equivalente al sistema:

e supposta soddisfatta la prima condizione, otteniamo dalla seconda l'equazione:

$$a^2 - a + b + 1 = 0$$

la quale, risolta rispetto al parametro b fornisce:

$$b = -(a^2 - a + 1).$$

Sostituendo tale valore nell'equazione reciproca iniziale abbiamo:

$$ax^3 - (a^2 - a + 1)x^2 - (a^2 - a + 1)x - a = 0$$

Allo stesso risultato saremmo pervenuti se avessimo imposto l'uguaglianza di una delle radici dell'equazione al parametro a in luogo del suo reciproco.

Ad esempio sia data l'equazione:

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

$$3x^3+13x^2+13x+3=0$$

Essa ha come radice -1 e quindi il suo primo membro è divisibile per x meno la radice nota, cioè per $x+1$.

Eseguendo tale divisione si ha:

$$(3x^3+13x^2+13x+3) : (x+1) = 3x^2+10x+3$$

Quindi:

$$(3x^3+13x^2+13x+3) = (x+1) (3x^2+10x+3)$$

$$(x+1) (3x^2+10x+3) = 0$$

E così l'equazione data si scinde nelle due seguenti:

$$(x+1) = 0 \quad \text{che ha come radice } -1$$

$$(3x^2+10x+3) = 0 \quad \text{che ha come radici } -3 \text{ e } -1/3$$

Quindi le tre radici dell'equazione sono: -1 , -3 e $-1/3$.

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

Osserviamo che le radici -3 e $-1/3$ sono una la reciproca dell'altra e la radice -1 è reciproca di sé stessa.

Risoluzione delle equazioni reciproche di seconda specie e 3° grado

Un'equazione reciproca di terzo grado e seconda specie ha come radici -1 e $+1$. Quindi il primo membro di tale equazione è divisibile sia per $x+1$ che per $x-1$ e, di conseguenza, l'equazione si scinde in tre equazioni: due di primo grado che hanno come radici le due radici già note -1 e $+1$, ed una di secondo grado che ha come radici le rimanenti due radici dell'equazione data.

Tale tipo di equazione ha la seguente formula:

$$ax^3+bx^2-bx-a=0$$

Poiché per $x=1$ il polinomio al primo membro dell'equazione si annulla, abbiamo:

	a	b	-b	-a
x=1	+a	a+b	+a	
	a	a+b	a	0

Quindi:

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = (x - 1) [ax^2 + (a - b)x + a] = 0$$

da cui:

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

$$x_1 = 1$$

████████

████████

Con l'utilizzo di queste formule è possibile generare un algoritmo in linguaggio Visual Basic per la risoluzione di questo tipo di equazioni reciproche.

Notiamo che se il discriminante: Δ
 $\Delta = (a-b)^2 - 4a^2$ si annulla abbiamo:

$$a+b = \pm 2a$$

allora:

$$b = -3a$$

e quindi:

$$x_2 = x_3 = 1$$

e cioè l'equazione ha la radice $x=1$ con molteplicità tre.

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

Infine anche per tali classi di equazioni possiamo dedurre le condizioni, perché una delle radici sia uguale al coefficiente a o al suo reciproco, pervenendo questa volta all'equazione:

$$ax^3 - (a^2 + a + 1)x^2 + (a^2 + a + 1)x - a = 0$$

Risoluzione delle equazioni reciproche di prima specie e 4° grado

L'equazione reciproca di quarto grado e prima specie sono del tipo:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

In tal caso, dopo aver notato che una delle radici dell'equazione è senz'altro diversa da zero (in quanto se così non fosse avremmo l'annullamento del coefficiente a dividendo i due membri per x^2 abbiamo:

allora:

Posto:

■

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

Allora:

■

da cui:

■

otteniamo l'equazione, detta risolvente:

$$ay^2+by+c-2a=0$$

da cui:

■

■

Pertanto:

■

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

e

■

e quindi le equazioni da risolvere sono:

$$x^2 - y_1 x + 1 = 0$$

e

$$x^2 - y_2 x + 1 = 0$$

e le soluzioni sono:

■

■

■

■

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

Per la nostra procedura risulta utile verificare se le due quantità:

$$\Delta_1 = y_1^2 - 4$$

e

$$\Delta_2 = y_2^2 - 4$$

possono coincidere. Ammettendo che ciò si realizzi:

Una delle condizioni conduce al valore: $B=0$ (biquadratica) mentre l'altra:

da cui

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

che equivale a:

$$b^2 - 4ac + 8a^2 = 0$$

cioè:

$$\Delta = 0$$

Viceversa, se:

$$\Delta = b^2 - 4ac + 8a^2 = 0$$

allora:

$$\Delta = 0$$

per cui:

$$\Delta = 0$$

Pertanto per ciò che concerne le radici, risulta:

Equazioni reciproche

██████████

██████████

██████████

██████████

allora:

$x_1 = x_3$ $x_2 = x_4$

In conclusione: se $\Delta = 0$ per cui se uno qualunque dei due precedenti discriminanti si annulla, anche l'altro deve annullarsi e viceversa se entrambi assumono lo stesso valore, allora il discriminante Δ si annulla.

Tale circostanza può essere da noi utilizzata per la costruzione del diagramma ad albero seguente:

Δ

0

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

^A 1	0
-------------------	---

^A 2	0
-------------------	---

Esponiamo il metodo di risoluzione da seguire per le equazioni reciproche di quarto grado e prima specie riferendoci al seguente esempio.

Sia data l'equazione:

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$$

Dividiamo tutti i termini per x^2 . Si ha così:

████████

Raccogliendo a fattore comune i coefficienti uguali si ha:

████████

Introduciamo ora un'incognita ausiliaria y , ponendo:

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

--- cui, elevando a quadrato:

--- quindi:

--- l'equazione data diventa:

$$(x^2 + 2x + 3) - 2x = 0$$

Una equazione data, trovati dall'ipotesi la equazione ausiliaria e deducendo quelli delle due equazioni note, cioè: Sostituendo ad y ciascuno dei suoi due valori sopra calcolati, si hanno le due equazioni:

--- risolvendole si ha $x = \pm 1/2$

Osserviamo che mancando del termine centrale (coefficiente nullo) ed essendo questi

equidistante dagli estremi, il suo coefficiente deve essere uguale al suo opposto: zero.

Risoluzione delle equazioni reciproche di seconda specie e 4° grado

Le equazioni reciproche di quarto grado e seconda specie hanno la seguente espressione:

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$$

Osserviamo che mancando del termine centrale (coefficiente nullo) ed essendo questi equidistante dagli estremi, il suo coefficiente deve essere uguale al suo opposto: zero.

Le sue radici sono: $x_1 = -1$ e $x_2 = +1$ come si vede dalla struttura stessa dell'equazione, di conseguenza il polinomio al primo membro risulta divisibile sia per il binomio

x

-1 che per

x

$+1$ cioè, in definitiva, per il binomio

x

2

-1 e quindi:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{rrrrr} ax^4 & +bx^3 & +ax^2 & -bx & -a \\ -ax^4 & & +ax^2 & & \\ \hline & +bx^3 & +ax^2 & -bx & -a \\ & -bx^3 & & +bx & \\ \hline & & +ax^2 & -a \\ & & -ax^2 & +a \\ \hline & & & 0 \end{array} & \begin{array}{l} x^2 - 1 \\ ax^2 + bx + a \end{array} \end{array}$$

Pertanto:

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

$$ax^4+bx^3-bx-a=(x^2-1)(ax^2+bx+a)=0$$

da cui segue:

$$x_1=-1$$

$$x_2=+1$$

■

■

Osserviamo che volendo ricercare le radici uguali al parametro a o al suo reciproco basta imporre che sia:

■

■

e che

■

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55



Pertanto l'equazione si riduce alla:

$$ax^4 - (a^2 + 1)x^3 + (a^2 + 1)x - a = 0$$

Consideriamo ad esempio l'equazione:

$$2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$$

osserviamo, anzitutto, che un'equazione di grado pari se fosse completa dovrebbe avere un numero dispari di termini (uno di più del grado), e quindi dovrebbe avere un termine centrale, equidistante dagli estremi. Ma in una equazione reciproca di seconda specie il coefficiente di questo termine dovendo essere uguale al suo opposto non può che essere zero e quindi questo termine deve mancare.

L'equazione data ha come radici -1 e $+1$ e quindi il suo primo membro è divisibile per $x+1$ e $x-1$.

Eseguendo, successivamente, queste due divisioni l'equazione data si è trasformata in:

$$(x + 1)(x - 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0$$

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

E questa si scinde nelle equazioni:

$$x+1=0 \quad \text{che ha come radice } -1$$

$$x-1=0 \quad \text{che ha come radice } +1$$

$$(2x^2 + 5x + 2) = 0$$

E risolvendo l'ultima equazione si ha che le radici dell'equazione reciproca data sono:

$$x_1=-1, \quad x_2=1, \quad x_3=-2, \quad x_4=-1/2.$$

Risoluzione delle equazioni reciproche di prima specie e 5° grado

Un'equazione reciproca di quinto grado se è di prima specie è del tipo:

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$$

ha come radice -1 in quanto l'equazione è di grado dispari e quindi il suo primo membro è divisibile per $x+1$.

Allora

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

$x=-1$	a	$+b$	$+c$	$+c$	$+b$	$+a$
	$-a$	$a-b$	$-a+b+c$	$a-b$	$-a$	
	a	$b-a$	$a-b+c$	$-a+b$	a	0

In tal modo essa si scinde in due equazioni: una di primo grado, che ha come radice -1 , e l'altra di quarto grado:

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=(x+1)[ax^4+(b-a)x^3+(a-b+c)x+a]=0$$

ma:

$$ax^4+(b-a)x^3+(a-b+c)x+a=0$$

è una equazione reciproca di quarto grado e di prima specie che abbiamo già visto in precedenza, per cui dividendo per x^2 diverso da 0 abbiamo:

██████████

██████████

aggiungiamo e sottraiamo $2a$:

██████████

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

otteniamo

[REDACTED]

[REDACTED]

Poniamo:

[REDACTED]

possiamo scrivere:

[REDACTED]

per cui:

[REDACTED]

[REDACTED]

Essendo:

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

■

risulta:

$$x^2+1=yx$$

$$x^2-yx+1=0$$

quindi:

$$x^2-y_1x+1=0$$

$$x^2-y_2x+1=0$$

pertanto le soluzioni dell'equazione sono:

$$x_1=-1$$

■

■

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

████████

████████

Risoluzione delle equazioni reciproche di seconda specie e 5° grado

L'equazione reciproca di quinto grado è di seconda specie ha la seguente forma:

$$ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0$$

essa ha come radice +1 e quindi il suo primo membro è divisibile per $x-1$. Per cui applicando Ruffini, otteniamo:

$x=1$	a	b	c	$-c$	$-b$	$-a$
	$+a$	$a+b$	$a+b+c$	$a+b$	$+a$	
	a	$a+b$	$a+b+c$	$a+b$	a	0

In tal modo essa si scinde in due equazioni: una di primo grado e l'altra di quarto grado. Quindi:

$$ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=(x+1)[ax^4+(a+b)x^3+(a+b+c)x^2+(a+b)x+a]=0$$

Per la legge di annullamento del prodotto, abbiamo la radice $x=-1$ e:

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

$$ax^4 + (a+b)x^3 + (a+b+c)x^2 + (a+b)x + a = 0$$

Questa è una equazione di prima specie e di quarto grado, poiché abbiamo una radice non nulla possiamo dividere per x^2 e otteniamo:

$$ax^2 + (a+b)x + (a+b+c) + (a+b)/x + a/x^2 = 0$$

$$ax^2 + (a+b)x + (a+b+c) + (a+b)/x + a/x^2 = 0$$

Aggiungiamo e sottraiamo $2a$:

$$ax^2 + (a+b)x + (a+b+c) + (a+b)/x + a/x^2 + 2a = 0$$

$$ax^2 + (a+b)x + (a+b+c) + (a+b)/x + a/x^2 + 2a = 0$$

$$ax^2 + (a+b)x + (a+b+c) + (a+b)/x + a/x^2 + 2a = 0$$

Poniamo:

$$y = x + \frac{a}{x}$$

otteniamo:

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

$$ay^2 + (a + b)y + b + c - a = 0$$

che risolta ci fornisce i valori:

[REDACTED]

[REDACTED]

Essendo:

[REDACTED]

risulta:

$$x^2 + 1 = yx$$

$$x^2 - yx + 1 = 0$$

quindi y_1 e y_2 rappresentano i coefficienti del termine lineare in x delle equazioni:

$$x^2 - y_1x + 1 = 0$$

Equazioni reciproche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:33 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 19:55

$$x^2 - y_2x + 1 = 0$$

pertanto le soluzioni dell'equazione sono:

$$x_1 = +1$$

████████

████████

████████

████████

Risoluzione delle equazioni reciproche di seconda specie e 6° grado

Un'equazione reciproca di sesto grado e seconda specie ha come radici -1 e $+1$ e quindi il suo primo membro è divisibile per $x+1$ e per $x-1$. Di conseguenza, l'equazione si scinde in tre equazioni: due di primo grado, che hanno come radici -1 e $+1$, ed una di quarto grado, che risulta reciproca di prima specie e che si risolve, quindi, come già visto in precedenza.

(Registrati e scarica l'allegato per saperne di più)