

I Numeri Complessi

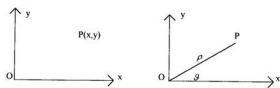
Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 20:54 - Ultimo aggiornamento Domenica 20 Febbraio 2011 19:35

E' possibile identificare un numero complesso scritto in forma algebrica:

$$z=x+iy$$

con un vettore in un riferimento cartesiano ortonormale Oxy :



dove la quantità:

■

viene detta modulo di z mentre l'angolo orientato J che la semiretta OP forma con il semiasse
positivo delle x , argomento o anomalia di z .

La posizione del punto P è definita da J e da ogni altro angolo multiplo di esso di un angolo
giro: $J+2kp$, con k appartenente a Z .

Si deduce quindi che ogni numero complesso $z=x+iy$ risulta geometricamente determinato
quando se ne assegna il modulo e l'argomento.

I Numeri Complessi

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 20:54 - Ultimo aggiornamento Domenica 20 Febbraio 2011 19:35

Dalla precedente figura possiamo ricavare le seguenti relazioni:

$$x = r \cos J \quad y = r \sin J$$

da cui:



La forma:

$$z = r(\cos J + i \sin J)$$

viene detta forma trigonometrica del numero complesso z .

Dati due numeri complessi:

$$z_1 = r_1(\cos J_1 + i \sin J_1) \quad z_2 = r_2(\cos J_2 + i \sin J_2)$$

è possibile definire il loro prodotto come:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos J_1 + i \sin J_1)(\cos J_2 + i \sin J_2) =$$

I Numeri Complessi

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 20:54 - Ultimo aggiornamento Domenica 20 Febbraio 2011 19:35

$$=r_1 r_2 (\cos J_1 \cos J_2 + i \sin J_1 \cos J_2 + i \sin J_2 \cos J_1 + i \sin J_2 i \sin J_1) =$$

$$=r_1 r_2 (\cos J_1 \cos J_2 + i \sin J_1 \cos J_2 + i \sin J_2 \cos J_1 - \sin J_2 \sin J_1) =$$

$$=r_1 r_2 [\cos J_1 \cos J_2 - \sin J_2 \sin J_1 + i(\sin J_1 \cos J_2 + \sin J_2 \cos J_1)] =$$

$$=r_1 r_2 [\cos(J_1 + J_2) + i \sin(J_1 + J_2)]$$

Quindi:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(J_1 + J_2) + i \sin(J_1 + J_2)]$$

Questa formula può essere generalizzata al caso di n fattori uguali al numero complesso z , quindi abbiamo:

$$z^* z^* \dots^* z = r^* r^* \dots r [\cos(J + J + \dots + J) + i \sin(J + J + \dots + J)]$$

e possiamo scrivere:

$$z^n = [r(\cos J + i \sin J)]^n = r^n (\cos J + i \sin J)$$

dove n appartenente a $\mathbb{Z}$

I Numeri Complessi

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 20:54 - Ultimo aggiornamento Domenica 20 Febbraio 2011 19:35

Questa formula è detta formula di Moivre e riveste particolare importanza nelle applicazioni.

E' possibile definire anche l'operazione di divisione, infatti si ha:

$$\frac{z}{w} = \frac{r(\cos J + i \sin J)}{s(\cos j + i \sin j)}$$

Possiamo definire anche la radice n -esima di un numero complesso.

Si chiama radice n -esima (con n intero positivo) di un numero complesso z ogni numero complesso n tale che si abbia:

$$w^n = z$$

Se $z=0$ si ha che $w=0$.

Supponiamo pertanto che sia z diverso da 0 e scriviamo i due numeri complessi sotto forma trigonometrica:

$$z = r(\cos J + i \sin J)$$

$$w = s(\cos j + i \sin j)$$

Avvalendoci della formula di Moivre, possiamo scrivere:

I Numeri Complessi

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 20:54 - Ultimo aggiornamento Domenica 20 Febbraio 2011 19:35

$$g^n(\cos nj + i \sin nj) = r(\cos J + i \sin J)$$

e tenendo presente che se due numeri complessi sono uguali allora i loro moduli lo sono, mentre i loro argomenti differiscono di un multiplo intero di 2π :

$$g^n = r \left[\cos \left(\frac{J + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{J + 2k\pi}{n} \right) \right] \quad j = J + 2k\pi$$

da cui:

$$\begin{aligned} r &= r \\ \cos \left(\frac{J + 2k\pi}{n} \right) &= \cos J \end{aligned}$$

sostituendo queste nell'espressione di n , abbiamo:

$$\cos \left(\frac{J + 2k\pi}{n} \right) = \cos J$$

Tale formula fornisce per ogni valore intero di k , una radice n -esima del numero complesso n .

Osserviamo che ogni numero complesso non nullo: $z = r(\cos J + i \sin J)$ ammette n e solo n radici n -esime, date dalla formula:

I Numeri Complessi

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 20:54 - Ultimo aggiornamento Domenica 20 Febbraio 2011 19:35

[REDACTED] successivamente $k=0, 1, 2, 3$ per la determinazione delle radici n -esime
[REDACTED] otteniamo le seguenti radici cubiche che si possono applicare per l'equazione di terzo
[REDACTED] (registrati e scarica l'allegato per saperne di più)