

I numeri perfetti

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 13:02 - Ultimo aggiornamento Sabato 22 Gennaio 2011 09:53

Particolare importanza dettero i Pitagorici alla qualità del numero in relazione alla somma dei suoi divisori (escluso il numero stesso), considerando perfetti quei rari numeri che uguagliano appunto tale somma [\[1\]](#).

Il *numero perfetto* è un numero naturale diverso da 1 e uguale alla somma dei suoi divisori positivi escluso se stesso.

Dei numeri perfetti si occuparono nell'antichità Euclide nei cosiddetti libri aritmetici, che vanno dal VII al IX, degli *Elementi* e il neopitagorico Nicomaco di Gerasa (I o II secolo d. C.) nell'opera *Introduzione aritmetica* [\[2\]](#).

Euclide nella definizione XXII del libro VII degli *Elementi* dice:

“Numero perfetto è quello che è uguale alla somma delle proprie parti.”

Osserviamo che in questa definizione l'unità va compresa tra i divisori, mentre va escluso il numero dato.

La considerazione dei numeri perfetti, che ha carattere tradizionale nell'aritmetica greca, sembra sia d'origine pitagorica, nel senso che risale ad una scuola pitagorica abbastanza antica.

Il primo numero perfetto è il 6, infatti

$$1 * 2 * 3 = 6$$

I numeri perfetti

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 13:02 - Ultimo aggiornamento Sabato 22 Gennaio 2011 09:53

I matematici greci conoscevano altri tre numeri di questa “specie”: 28, 496 e 8.128.

Il numero 28, ad esempio, è divisibile per 1, 2, 4, 7 e 14 (anche in questo caso escludiamo 28) ed è

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.$$

In genere se si sommano i divisori propri di un numero, cioè tutti i suoi divisori, tranne il numero stesso, si ottiene un numero che è più grande o più piccolo del numero considerato.

Nel primo caso il numero viene chiamato *numero sovrabbondante*, nel secondo caso *numero scarseggiante*

.

Ad esempio, 30 è un numero sovrabbondante, infatti la somma dei suoi divisori propri è maggiore di 30:

$$1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 = 42.$$

Mentre 50 è un numero scarseggiante, infatti la somma dei suoi divisori propri è minore di 50:

$$1 + 2 + 5 + 10 + 25 = 43.$$

Il numero perfetto è presentato da Nicomaco come una forma di equilibrio tra quei due tipi, entrambi concepiti come imperfetti [\[3\]](#).

I numeri perfetti

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 13:02 - Ultimo aggiornamento Sabato 22 Gennaio 2011 09:53

E' difficile trovare dei numeri perfetti. I numeri perfetti sono rari e affascinanti, come osservava già Luca Pacioli nel XV secolo:

“Ancora si comme fra la gente più imperfecti e tristi che buoni e perfecti si trovano e li buoni sono pochi e rari: così fra li numeri pochi e rari sono li perfecti e molti e assai sonno li imperfecti: cioè superflui e diminuiti”.

Solo nel XV secolo venne identificato, da un matematico sconosciuto, il quinto numero perfetto: 33.550.336.

Il sesto e il settimo numero perfetto vennero scoperti da Pier Antonio Cataldi (1548 - 1626):

8.589.869.056 e 2.305.843.008.139.952.128

Si osservi che i primi quattro numeri perfetti possono essere scritti nel modo seguente:

$2 * 3,$

$4 * 7,$

$16 * 31,$

$64 * 127,$

cioè:

I numeri perfetti

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 13:02 - Ultimo aggiornamento Sabato 22 Gennaio 2011 09:53

$$2 * (4 - 1),$$

$$4 * (8 - 1),$$

$$16 * (32 - 1),$$

$$64 * (128 - 1).$$

Da queste semplici osservazioni, evidenziando le potenze del 2 presenti in ogni numero perfetto, Euclide, nel 300 a.C., diede la formula dei numeri perfetti, nei suoi *Elementi*, Libro IX, Proposizione 36:

“Se, partendo dall’unità, si prendano quanti si voglia numeri raddoppiando successivamente sino a che la loro somma venga ad essere un numero primo, e se la somma stessa vien moltiplicata per l’ultimo dei numeri considerati, il prodotto sarà un numero perfetto”.

Come si nota questa proposizione fornisce subito un algoritmo per ottenere numeri perfetti.

Si parte dall’unità e raddoppiando si ha 2 come secondo elemento, continuando a raddoppiare si ottiene una successione i cui termini sono le successive potenze di 2.

Quindi si considera la progressione geometrica di ragione 2:

I numeri perfetti

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 13:02 - Ultimo aggiornamento Sabato 22 Gennaio 2011 09:53

$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, \dots$

Si considerano quanti termini si vogliano e si addizionano insieme, cioè si esegue la somma dei primi n termini della progressione:

$$s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n-1}$$

Se la somma s è un numero primo basta moltiplicarlo per l'ultimo dei numeri considerati:

$$s * 2^{n-1}$$

il prodotto è un numero perfetto, cioè uguale alla somma dei suoi divisori (inclusa l'unità, escluso il numero stesso).

Allora se

$$s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

è un numero primo, allora:

$$2^{n-1} (2^n - 1)$$

è un numero perfetto.

I numeri perfetti

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 13:02 - Ultimo aggiornamento Sabato 22 Gennaio 2011 09:53

Inoltre $(2^n - 1)$ è primo se n è primo

I numeri perfetti che si conoscono sono sempre pari ed Eulero, nel Settecento, verificò che sono dati, tutti, soltanto dalla formula di Euclide.

Infatti Euclide ed Eulero hanno mostrato che:

“un numero n pari è perfetto se e solo se esiste un intero s tale che:

con numero primo”.

Euclide ha trovato una condizione che caratterizza i numeri perfetti pari, ma non si sa ancora se siano infiniti o se esistano numeri perfetti dispari.

Inoltre:

“Se s è un numero primo e, a sua volta $2^s - 1$ è sempre primo, allora $2^{s-1} (2^s - 1)$ è un numero perfetto”

Prendiamo, ad esempio, $p = 5$.

Abbiamo:

$$2^5 - 1 = 31,$$

I numeri perfetti

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 13:02 - Ultimo aggiornamento Sabato 22 Gennaio 2011 09:53

che è ancora un numero primo e:

$$2^4 * (2^5 - 1) = 496.$$

I numeri primi della forma $2^p - 1$ si chiamano *numeri primi di Mersenne*, dal nome del frate minimo francese che ebbe l'idea di applicare tale formula alla ricerca dei numeri primi.

E' quindi sufficiente trovare un numero primo di Mersenne per avere anche, collegato a questo, un nuovo numero perfetto.

Ma senza calcolatore, i conti erano molto difficoltosi ed anche un matematico autorevole come Luca Pacioli sbagliò i calcoli, annunciando ai suoi colleghi matematici di aver trovato un "*quattuordecimus numerus perfectus*" di sedici cifre:

$$2^{26}(2^{27}-1)$$

che in realtà non è perfetto.

Sempre Eulero, nel 1772, trovò l'ottavo numero perfetto:

$$2.658.455.991.569.831.744.654.692.615.953.842.176$$

In formula, con $p = 31$:

$$2^{30} * (2^{31} - 1).$$

I numeri perfetti

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 13:02 - Ultimo aggiornamento Sabato 22 Gennaio 2011 09:53

Un numero molto grande, che autorizzò un matematico, Peter Barlow, a scrivere nella sua *Teoria dei Numeri*, pubblicata nel 1811
:

“E’ il numero perfetto più grande che si conosca e, poiché si tratta di numeri curiosi ma inutili, difficilmente qualcuno vorrà andare oltre”.

La ricerca dei numeri perfetti invece continuò, anche senza calcolatore, arrivando alla scoperta di dodici numeri di questa specie. Uno dei più grandi di questi, è:

$$2^{126} \cdot (2^{127} - 1),$$

un numero di 77 cifre che impegnò per diversi mesi, nel 1877, Édouard Lucas, il grande esperto in giochi matematici.

L’anno dei numeri perfetti è stato il 1952 quando vennero scoperti, in pochi mesi, ben cinque nuovi numeri primi di Mersenne:

$$2^{521} - 1,$$

$$2^{607} - 1,$$

$$2^{1279} - 1,$$

I numeri perfetti

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 13:02 - Ultimo aggiornamento Sabato 22 Gennaio 2011 09:53

$$2^{2203} - 1$$

$$2^{2281} - 1$$

ognuno dei quali dava quindi origine a un nuovo numero perfetto.

Il venticinquesimo numero perfetto venne scoperto da due ragazzi di diciotto anni, Laura Nickel e Curt Noll, il 30 ottobre del 1978, usando un calcolatore della Univeristy of California.

La formula di Mersenne è quella più usata dai cosiddetti cacciatori di numeri primi che vanno alla ricerca dei numeri primi più grandi.

Si parte da un numero primo già noto, lo si applica alla formula: $2^p - 1$ e si controlla, con appositi programmi, se il numero così trovato è ancora primo.

In questo modo, fino a oggi, sono stati trovati 37 numeri primi di Mersenne e quindi 37 corrispondenti numeri perfetti.

Il più grande di questi, scoperto nel 1998, è:

$$2^{3021376} \cdot (2^{3021377} - 1).$$

E' un numero che non possiamo naturalmente scrivere per esteso: le sue cifre riempirebbero le pagine di un grande volume.

I numeri perfetti

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 13:02 - Ultimo aggiornamento Sabato 22 Gennaio 2011 09:53

Osserviamo ancora che non sono mai stati trovati numeri perfetti dispari, ma nulla esclude che possano esistere.

Alcuni matematici hanno provato che se esistono devono avere almeno 300 cifre decimali e devono essere composti almeno da 29 fattori primi e Carl Pomerance, matematico dell'università della Georgia, ha inoltre dimostrato che:

“se un giorno sarà trovato un numero perfetto dispari, esso dovrà contenere almeno 7 numeri primi diversi”.

Si può dimostrare che ogni numero perfetto, tranne il 6, è uguale a somme di successioni dei numeri dispari al cubo.

Ad esempio:

$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$$

$$8.128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$$

Si ha anche che la somma dei reciproci di tutti i divisori di un numero perfetto, incluso il numero stesso, è sempre uguale a 2.

Ad esempio:

$$1/1 + 1/2 + 1/4 + 1/7 + 1/14 + 1/28 = 2.$$

I numeri perfetti

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 13:02 - Ultimo aggiornamento Sabato 22 Gennaio 2011 09:53

[1] Bottazzini, Freguglia, T. Rigatelli, *Fonti per la Storia della Matematica*, Sansoni.

[2] P. Nastasi, A. Scimone, *Da Euclide a Goldbach Storie di Uomini e Numeri*, Sigma

[3] Da *Histoire de problèmes. Histoire des Mathématiques* a cura della Commission Inter-I.R.E.M. Épistémologie et Histoire des Mathématique, Paris, Ellipses, 1993, p. 386-388.