

Terne Pitagoriche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:36 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 20:29

Una questione interessante di teoria dei numeri è connessa al teorema di Pitagora.

Ai greci era noto che un triangolo di lati 3, 4, 5 è rettangolo.

Questo suggerisce il problema generale: quali altri triangoli rettangoli hanno lati le cui lunghezze sono multipli interi di una lunghezza unitaria?

Il teorema di Pitagora è espresso algebricamente dall'uguaglianza:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

dove a e b sono le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo e c è la lunghezza dell'ipotenusa.

Il problema di trovare tutti i triangoli rettangoli con lati le cui lunghezze siano misurate da numeri interi è quindi equivalente al problema di trovare tutte le soluzioni intere (a, b, c) dell'equazione

$$\begin{aligned} &a^2 \\ &+ b^2 \\ &= c^2 \\ &. \end{aligned}$$

Ogni terna di tali numeri è detta *terna pitagorica*, quindi le terne pitagoriche sono quelle terne di numeri interi che soddisfano il teorema di Pitagora

Terne Pitagoriche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:36 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 20:29

[1]

.

In generale tali terne sono tutte e sole quelle del tipo:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

dove a , b , c costituiscono la terna pitagorica; m e n sono numeri naturali con $m > n$.

Una delle tante formulazioni del teorema di Pitagora sostiene che:

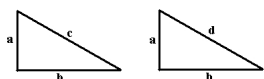
“Se a e b sono i cateti di un triangolo rettangolo e c è l’ipotenusa, si ha

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Vale anche il viceversa:

“Se i lati a , b e c di un triangolo verificano la relazione $a^2 + b^2 = c^2$, allora il triangolo è rettangolo, a e b sono i cateti e c l’ipotenusa”

.



Terne Pitagoriche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:36 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 20:29

La dimostrazione è molto semplice.

Costruiamo, un triangolo rettangolo con i cateti a e b , e sia d la sua ipotenusa.

Per il teorema di Pitagora si ha:

$$d^2 = a^2 + b^2,$$

mentre per ipotesi:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ne deriva che:

$$d^2 = c^2,$$

dunque

$$d = c,$$

cosicché i due triangoli hanno i tre lati uguali, e dunque sono uguali.

Ma il secondo era per costruzione un triangolo rettangolo con i cateti a e b , e quindi lo stesso vale per il primo.

Terne Pitagoriche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:36 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 20:29

Il risultato precedente ci dà un metodo molto semplice per costruire triangoli rettangoli senza bisogno di misurare gli angoli.

Infatti basta trovare tre numeri a , b e c , che verifichino la relazione $a^2 + b^2 = c^2$; il triangolo di lati a , b e c sarà automaticamente rettangolo.

I numeri a , b e c formano una terna pitagorica.

Infatti si ha

$$a^2 = (m^2 - n^2)^2 = m^4 + n^4 - 2m^2 n^2$$

e

$$b^2 = (2mn)^2 = 4 m^2 n^2$$

e quindi

$$a^2 + b^2 = m^4 + n^4 - 2m^2 n^2 + 4 m^2 n^2 =$$

$$= m^4 + n^4 + 2m^2 n^2 =$$

$$= (m^2 + n^2)^2 = c^2.$$

Terne Pitagoriche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:36 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 20:29

Le formule:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m + n^2$$

generano infinite terne pitagoriche che si dividono in:

- Terne Pitagoriche Primitive
- Terne Pitagoriche Derivate

Le terne pitagoriche primitive sono quelle il cui M.C.D. è uguale ad 1, mentre le terne pitagoriche derivate sono quelle costituite da tre numeri interi il cui M.C.D. è diverso da 1.

La formula:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m + n^2$$

dà tutte le possibili terne pitagoriche.

Cominciamo, infatti, con l'osservare che se a , b e c formano una terna pitagorica, lo stesso vale per ha , hb e hc .

Ci si può quindi limitare a considerare terne con a e b primi tra loro; tutte le altre si otterranno moltiplicando a , b e c per lo stesso numero.

Terne Pitagoriche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:36 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 20:29

Facciamo ora vedere che a e b devono essere uno pari e uno dispari, e di conseguenza c deve essere dispari.

Che a e b non siano ambedue pari dipende dal fatto che sono primi tra loro.

Che non possano essere ambedue dispari, è un po' più delicato.

Se a e b fossero dispari, lo sarebbero anche a^2 e b^2 , cosicché c^2 , somma di due numeri dispari, sarebbe pari, e quindi

c
sarebbe pari. D'altra parte, se
 a
e
 b
sono dispari si deve avere:

$$a = 2k+1 \qquad b=2h+1$$

da cui

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$b^2 = 4h^2 + 4h + 1$$

e sommando si ottiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4(k^2 + k + h^2 + h) + 2.$$

Terne Pitagoriche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:36 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 20:29

Da questa formula segue che dividendo c^2 per 4 si ottiene il quoziente $k^2 + k + h^2 + h$ e il resto 2.

In particolare, c^2 non è divisibile per 4, e questo è assurdo, dato che c è pari.

Riassumendo, se a , b e c formano una terna pitagorica, i due numeri a e b devono essere uno pari e uno dispari (ad esempio

b

pari ed

a

dispari), e di conseguenza

c

deve essere dispari.

Nella relazione $a^2 + b^2 = c^2$ portiamo a^2 a secondo membro; si ha:

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a).$$

Siccome a e c sono dispari, $c+a$ e $c-a$ sono pari.

Se poniamo:

$$b=2s \quad c+a=2x \quad c-a=2y$$

avremo:

$$s^2=xy.$$

Terne Pitagoriche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:36 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 20:29

Anche x e y sono primi tra loro; infatti se avessero un fattore comune q , anche $a = x - y$ sarebbe divisibile per

q

, e lo stesso sarebbe vero per

b

2

, e dunque per

b

, in contraddizione con l'ipotesi che

a

e

b

fossero primi tra loro.

Siccome il prodotto xy è un quadrato, x e y sono essi stessi dei quadrati:

$$x = m^2 \text{ e } y = n^2.$$

Si avrà allora in conclusione:

$$a = x - y = m^2 - n^2 \quad c = x + y = m^2 + n^2 \quad b^2 = 4xy = 4m^2n^2$$

per cui:

$$b = 2mn.$$

La formula:

Terne Pitagoriche

Scritto da Maria Rispoli

Domenica 09 Gennaio 2011 21:36 - Ultimo aggiornamento Domenica 06 Febbraio 2011 20:29

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

è così dimostrata.

Dando a m e n valori successivamente differenti, sempre primi tra loro, e uno pari e l'altro dispari, troviamo tutte le possibili terne pitagoriche.

Se invece è dato in input un solo numero n è possibile determinare da esso una terna pitagorica (a,b,c) nel seguente modo:

$$a = n, \quad b = n^2 - 1, \quad c = n^2 + 1$$

Se n è dispari si ottengono terne pitagoriche formate da numeri naturali, mentre se n è pari si ottengono terne pitagoriche formate da numeri decimali, se vogliamo anche in questo caso ottenere terne pitagoriche formate da numeri naturali dobbiamo porre:

$$a = 2n, \quad b = n^2 - 1, \quad c = n^2 + 1$$

Si deve ad Euclide (Lemma 1 della Proposizione 29 del libro X degli *Elementi*) la relazione:

$$(b^2 - a^2)^2 + (2ab)^2 = (b^2 + a^2)^2$$

che fornisce le terne pitagoriche per a e b primi tra loro, uno pari e l'altro dispari. Tale relazione detta comunemente di Diofanto – Fermat, si trova anche nel

Liber quadratorum

di Leonardo Pisano (detto il Fibonacci), opera datata 1225 ed è contenuta in importanti codici del XV secolo

[2]

.

[1] R. Courant, H. Robbins, *Che cosa è la matematica?* , p. 79-80, Bollati Boringhieri.

[2] Bottazzini, Freguglia, T. Rigatelli, *Fonti per la Storia della Matematica*, Sansoni.

(Registrati e scarica l'allegato per saperne di più)